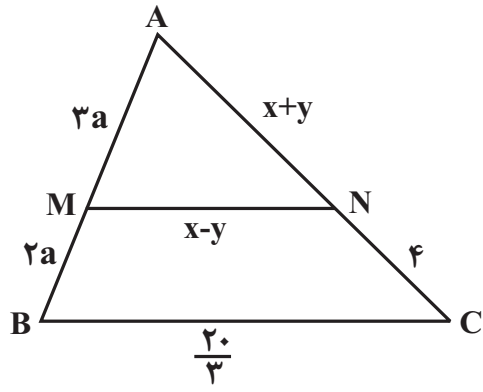


رشته : تجربی		سوالات درس : ریاضی ۲
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
منبع دانلود : قلم چی		برگزار شده در : تهران

ردیف	شرح سؤال	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی موارد زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچکتر از اندازه هر یک از ساقهای آن است.</p> <p>ب) انتهای کمان $-\frac{7\pi}{4}$ در ربع اول دایره مثلثاتی قرار دارد.</p> <p>پ) زاویه ۲ رادیان تقریباً ۱۰۷ درجه است.</p> <p>ت) $\frac{\pi}{9}$ رادیان برابر ۲۰ درجه است.</p>	۱
۲	<p>معادلات زیر را حل کنید.</p> <p>الف) $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = 0$</p> <p>ب) $\frac{7}{x^2 - 9} + \frac{x - 2}{3 - x} = 1$</p>	۲

در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. x و y را بدست آورید.

۳



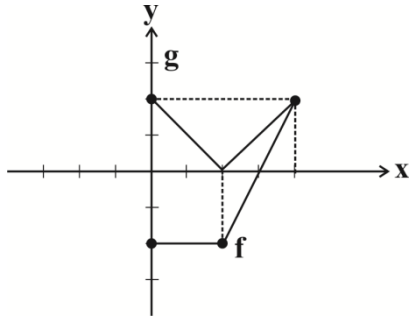
۱/۵

ضابطه تابع وارون $f(x) = \frac{3x+2}{4}$ را بدست آورید.

۴

۱

با توجه به نمودار دو تابع f و g ، ضابطه تابع $y = (f + g)(x)$ را بدست آورید.



از معادلات $\log x = 2 \log y - \log 3$ و $9^{y-x} \times 3^{x-3} = 1$ ، حاصل x و y را بدست آورید.

بیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2|x|}{x} & , x > 10 \\ 2 & , x = 10 \\ -2(|x| + [-x]) & , x < 10 \end{cases}$ را در نقطه $x = 10$ بررسی کنید.

۱	در داده‌های ۱۴، ۱۰، ۸، ۲۲، ۴، ۱۲، ۷، ۱۹ اختلاف میانگین و میانه را بدست آورید.	۸
۲	<p>حاصل حدهای زیر را بدست آورید.</p> <p>(الف) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{ 1 + \cos x }{\sin^2 x}$</p> <p>(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 1}$</p>	۹
۱/۵	اگر $\log_5^3 = a$ و $\log_5^2 = b$ باشد، حاصل $\log_5 \frac{2\sqrt[3]{12}}{5}$ بر حسب a و b بدست آورید.	۱۰
۱/۵	در پرتاب دو تاس، اگر بدانیم مجموع اعداد روشده بزرگتر از ۷ است، احتمال آنکه حاصل ضرب آنها، مضرب ۳ باشد، کدام است؟	۱۱

۱	<p>با توجه به نمودار تابع f، حاصل $A = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را بدست آورید.</p>	۱۲
۱/۵	<p>اگر $A = \cos \frac{5\pi}{3} + a \sin \frac{7\pi}{6}$، $B = \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{4\pi}{3} - \cot \frac{9\pi}{4}$ و حاصل دو عبارت A و B قرینه یکدیگر باشند، a را بدست آورید.</p>	۱۳
۱/۵	<p>در آزمون مهارت‌سنجی یک شغل، نمرات دو شخص A و B به صورت زیر است. کدام یک برای این شغل مناسب‌تر است؟</p> $\begin{cases} A : 19, 20, 20, 10, 11 \\ B : 16, 15, 17, 12, 20 \end{cases}$	۱۴

پاسخ تشریحی:

ردیف	شرح پاسخ
۱	<p>۱ رادیان تقریباً برابر ۵۷ درجه و ۲ رادیان تقریباً برابر ۱۱۴ درجه است. سایر عبارتها درست هستند.</p>
۲	<p>(الف) مجموع دو عبارت رادیکالی با فرجه زوج برابر صفر است، پس معادله زمانی جواب دارد که هر دو رادیکال همزمان صفر شوند:</p> $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$ $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$ <p>پس تنها $x = -3$ جواب معادله است. (ب)</p> $\frac{7}{x^2-9} + \frac{x-2}{3-x} = 1 \Rightarrow \frac{7}{(x-3)(x+3)} + \frac{-x+2}{x-3} - 1 = 0$ $\Rightarrow \frac{7 + (-x+2)(x+3) - (x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} = 0$ <p>اگر کسری برابر صفر باشد، آنگاه صورت کسر برابر صفر است:</p> $7 - x^2 - 3x + 2x + 6 - x^2 + 9 = 0$ $\Rightarrow -2x^2 - x + 22 = 0, \Delta = (-1)^2 - 4(-2)(22) = 1 + 176 = 177$ <p>دقت کنید چون $\sqrt{\Delta} = \sqrt{177}$ گنگ است و بنابراین جوابها گنگ و مخالف ± 3 هستند، پس جوابها قابل قبول اند.</p>
۳	<p>$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{3a}{2a} = \frac{x+y}{4}$</p> $\Rightarrow x+y = 6$ <p>$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{طبق تقسیم قضیه تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$</p> $\Rightarrow \frac{3a}{5a} = \frac{x-y}{20} \Rightarrow x-y = 4$ $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=1$
۴	$y = \frac{3x+2}{4} \Rightarrow 4y = 3x+2$ $\Rightarrow 4y-2 = 3x \Rightarrow \frac{4y-2}{3} = x$ $\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{4y-2}{3}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x-2}{3}$
۵	<p>با توجه به شکل به ازای $0 \leq x \leq 4$، ضابطه تابع g به صورت $g(x) = x-2$ و ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-6, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$ است.</p> $\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} -2 + (-x+2), & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-6 + x-2, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$ $\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3x-8, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

$$3^{2y-2x} \times 3^{x-3} = 3^{2y-x-3} = 3^0 \Rightarrow 2y-x=3$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+3}{2} (*)$$

$$\log x = \log \frac{y^2}{3} \Rightarrow x = \frac{y^2}{3}$$

$$\Rightarrow y^2 = 3x \xrightarrow{(*)} \frac{x^2 + 6x + 9}{4} = 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری در } (*)} y = 3 \Rightarrow x+y = 6$$

۶

$$\lim_{x \rightarrow 1.0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1.0^+} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 1.0^+} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1.0^-} -2(|x| + [-x]) = -2 \times (-1) = 2$$

$$f(1.0) = 2$$

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 1.0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1.0^-} f(x) = f(1.0) = 2$ ، بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1.0$ پیوسته است.

۷

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: ۲۲ و ۱۹ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۷ و ۴

$$\text{میانۀ داده‌ها برابر است با میانگین دو داده وسط: } \frac{10+12}{2} = 11$$

$$\text{میانگین داده} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \frac{96}{8} = 12$$

پس اختلاف میانگین و میانۀ برابر $12 - 11 = 1$ می‌باشد.

۸

الف) می‌دانیم عبارت $(1 + \cos x)$ همواره نامنفی است. لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - \cos \pi} = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}(x-2)}{x+1}$$

$$= \frac{2 \times (-1)}{2} = -1$$

۹

پس از ساده کردن عبارت داریم:

$$\log_{\delta} \frac{2\sqrt[3]{12}}{\delta} = \log_{\delta} \frac{2 \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{\delta} = \log_{\delta} \frac{2^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{\delta}$$

$$\left(\frac{5}{3} \log_{\delta} 2 + \frac{1}{3} \log_{\delta} 3 \right) - \log_{\delta} \delta = \left(\frac{5}{3} \times b + \frac{1}{3} \times a \right) - 1$$

$$= \frac{5b + a - 3}{3}$$

۱۰

حالات مجموع اعداد روشده دو تاس بزرگتر از ۷ را می‌نویسیم:

۱۱

$$A = \underbrace{\{(4,4), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3)\}}_{\text{مجموع ۸}}, \underbrace{\{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4)\}}_{\text{مجموع ۹}},$$

$$\underbrace{\{(4,6), (6,4)\}}_{\text{مجموع ۱۰}}, \underbrace{\{(5,5)\}}_{\text{مجموع ۱۱}}, \underbrace{\{(6,6)\}}_{\text{مجموع ۱۲}} \Rightarrow n(A) = 15$$

پیشامد A فضای نمونه‌ای جدید ما می‌باشد. پس از بین اعضای A، زوج‌هایی را انتخاب می‌کنیم که حاصل ضرب اعداد آن‌ها، مضرب ۳ باشد:

$$B = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (3,6), (6,3), (4,6), (6,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow n(B) = 11$$

پس احتمال خواسته شده در سؤال برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد حالات ممکن}} = \frac{11}{15}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$$

۱۲

$$\Rightarrow A = 0 + 3 + 1 = 4$$

ابتدا عبارت‌های A و B را محاسبه می‌کنیم:

۱۳

$$A = \cos \frac{5\pi}{3} + a \sin \frac{7\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + a \sin(\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} - a \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow A = \frac{1}{2} - \frac{a}{2}$$

$$B = \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{4\pi}{3} - \cot \frac{9\pi}{4}$$

$$= \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) - \cot(2\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} \times (-\cos \frac{\pi}{3}) - \cot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$A = -B \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{a}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{a}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow a = -1/5$$

برای مقایسه، ابتدا میانگین نمره‌ها را حساب می‌کنیم. در صورتی که نمره‌ها برابر باشند شخصی مناسب‌تر است که نمراتش واریانس کمتری داشته باشد.

۱۴

$$\bar{x}_A = \frac{19 + 20 + 20 + 10 + 11}{5} = 16,$$

$$\Rightarrow \sigma_A^2 = \frac{3^2 + 4^2 + 4^2 + (-6)^2 + (-5)^2}{5} = \frac{102}{5}$$

$$\bar{x}_B = \frac{16 + 15 + 17 + 12 + 20}{5} = 16$$

$$\Rightarrow \sigma_B^2 = \frac{0^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-4)^2 + 4^2}{5} = \frac{34}{5}$$